Im Leben mit etwas »rechnen können«

Sechs Aspekte der Grundrechenarten – Teil 1

Adolf Fischer

Rechenfertigkeit und Lebenswirklichkeit

Gewöhnlich kennt man die »vier Grundrechenarten« als Addition (+) , Subtraktion (–), Multiplikation (· bzw. x) und Division (:).

Die dazu nötigen Rechenfertigkeiten sind meist völlig losgelöst von bildhaften Vorstellungen und haben auch keinen Bezug mehr zu einer konkreten Lebenswirklichkeit. Ja, es ist sogar von Vorteil, wenn Bindungen an Bilder oder Dinge durch einen erstarkenden Zahlenbegriff und durch zunehmend gewandteres Rechnen abgelegt, überwunden werden. Nur so kann sich das »reine Rechnen« bzw. Denken von konkreten Anlässen emanzipieren und seine eigene Struktur transparent werden lassen. Das Rechnen wird damit zu einer verlässlichen Routine und wird frei handhabbar. Die Rechengesetze haben ihren eigenen Wert in sich, sie sind unabhängig von der Welt.

Doch Lebenstüchtigkeit beruht darauf, dass sich Gedanken an Erfahrungen in der Welt anschließen lassen, dass sich geistige Gesetze in der Welt spiegeln und sie überschaubar machen. So wird der Lehrer immer wieder versuchen, Rechenaufgaben mit der Lebenswirklichkeit zu verbinden. Vorgefundene »Textaufgaben« werden diesem Anspruch oft nicht gerecht; sie wirken weltfremd und erzwungen. Die sprachliche »Umkleidung« stellt dann für den Schüler eine Art Chiffrierung dar, die er rückwärts wieder entschlüsseln muss, um an die gewünschte Rechnung zu kommen. So vorzugehen, um die Fähigkeiten zu trainieren, ist in Maßen berechtigt, wenn der mathematische Gehalt durch die Aufgabe beleuchtet statt verdunkelt wird. Dem »echten Leben« sollte aber immer Vorrang und genügend Raum gewährt werden: Von konkreten Anforderungen ausgehende (und zunächst nur sprachlich formulierbare) Aufgaben wecken Problembewusstsein, spornen zur Suche an; die gefundenen Lösungswege verbinden die Gedankenwelt mit der Erfahrungswelt.

So schärft sich auch der Blick für die inhaltliche Bedeutung der verschiedenen Rechenoperationen; rasch entdeckt man, dass statt der normalen »vier Rechenarten« insgesamt sechs zu unterscheiden sind. Wir wollen mit der Addition beginnen. Mit ihr wird das reine Abzählen überwunden und ein neues Niveau erklommen. Hier wird der Grund für jegliches Rechnen gelegt. In dieser interessanten Phase des Übergangs vom Zählen zum Rechnen lässt sich beim Kind die fortschreitende Entwicklung hin zu einem immer freier werdenden Zahlbegriff beobachten.

Im Leben »mit etwas rechnen« heißt, dass ich mögliche Ergebnisse vorweg nehmen und sie realistisch zuordnen oder wenigstens sinnvoll abwägen kann. Es müssen also bereits Erfahrungen vorliegen und auf die neue Aufgabe anwendbar oder übertragbar sein.

Vom Zählen zum Rechnen: Auf dem Weg zum Zahlbegriff

Mit der (auswendig gelernten) Folge der Zahlwörter erkennen wir die Stellung (Nummerierung) innerhalb der Aufreihung wieder; diese Abfolge nennen wir Ordnungs- oder Ordinalzahlen. Um eine Anzahl als »echte« Zahl (Kardinalzahl) zu erkennen, darf man nicht beim Abzählen verweilen, sondern man muss einen Überblick über das Ganze erringen.[1] Dennoch ist die Freude eines Vorschulkindes berechtigt, wenn es stolz verkündet: »Ich kann schon bis zwanzig zählen!« Es befindet sich damit auf dem Weg zum Rechnen, indem es die Zahlwörter mit Rhythmus und räumlicher Folge verbindet und strukturiert.

Allgemein verbreitet, aber nicht zutreffend, ist die Vorstellung, dass die Addition bereits mittels Abzählen erreichbar sei (man bräuchte nur »weiter zu zählen«). Tatsächlich erfordert das Finden, Erkennen oder Anerkennen des richtigen Ergebnisses mehr als Abzählen. Kinder, die in der 3. Klasse noch mit den Fingern »zählend rechnen«, können eben noch nicht »echt rechnen«, sondern ersetzen das Rechnen durch Abzählen.

Ein Kind, das für die Zahl 8 noch keinen Begriff hat, kann auch nicht die Summe 5 + 3 bilden. Es kann aber die Zahlworte in der richtigen Reihenfolge lernen, es kann auch die Korrelation zu gleich vielen abzählbaren Dingen herstellen. Aber genau genommen ist damit erst erreicht, dass es zu den 5 abgezählten Kastanien dahinter 3 weitere legt und das Zählen bis 8 fortsetzt. Das Wort 8 bezeichnet dann zunächst nur die »Nummer« (Ordinalzahl) der letzten Kastanie, schließt aber noch nicht die Erkenntnis ein, dass 5 + 3 »gleich« 8 ist. Schon gar nicht lässt sich daraus ableiten, dass die nächste Aufgabe »3 + 5« auf dasselbe führt, sie muss neu »er-zählt« werden.

Zu den schönsten Momenten des Lehrerseins gehört sicher die Äußerung eines Erstklässlers, mit der dieser das Wesen des echten Rechnens über das Abzählen erhebt: »Fünf und Drei ist *immer* Acht«. Dies geht nur, wenn vorher die Vielfalt von Aspekten einer »Achtheit« erlebt worden ist und die Konstanz der Acht trotz ihrer verschiedenen Aufgliederungen. Dazu gehört auch, dass in obigem Bilde 8 Kastanien in zwei Gruppen zu 5 und 3 gegliedert werden:

(OOOOOOOO) = (OOOOO) + (OOO)

»8« kann also »5 und 3« sein (neben einer Fülle von weiteren Möglichkeiten, wel-

1 In der höheren Mathematik werden die Kardinalzahlen logisch korrekt von einer geordneten Kette von (nominalistisch eingeführten) Ordinalzahlen abgeleitet, doch kann dieser Weg nur prüfend nachvollzogen werden, wenn bereits ein Zahlbegriff vorhanden

che die Kinder selbst probieren – durchaus auch ohne Verdinglichung in Form von abzählbaren Gegenständen). Es wird von der Summe ausgegangen, dann wird sie gegliedert. Für den Unterricht ermöglicht dieser Ansatz eine Vielfalt von Antworten durch die Kinder; jedes kann seine »persönliche« Rechenaufgabe bearbeiten, und obwohl die Lösungen sich unterscheiden, können sie dennoch richtig sein: »Was kann die Acht alles sein?« oder: »Wer weiß eine Rechenaufgabe mit 8?« Das Rechnen verliert so seine – von vielen Menschen als zwanghaft und lebensfremd empfundene – einengende Logik, die häufig als Zitat übertragen wird: Ein Sachverhalt ist »so klar, wie zwei und zwei vier ist«.

Beim Zerlegen des Ganzen in seine Teile steht die Gleichheit schon von vornherein über diesem Tun, sie entsteht also nicht durch Abzählen. Und erst wenn das Kind weiß, dass 8 auch »5 und 3« sein kann, wird es bei der Aufgabe »5 + 3« abwägend die Gleichheit mit der »8« (wieder-)erkennen. Das innerliche Abwägen deutet auf den Gleichgewichtssinn als leibliche Grundlage für diese Fähigkeit (über die sinnfällige Verbindung von Zahlen mit sinnlichen und körperlichen Erlebnissen des Kindes bis hin zur Befestigung des Zahlbegriffes sei auf die ausführliche Darstellung von Ernst Schuberth[2] verwiesen).

Noch stärker wird diese Verbindung sichtbar, wenn der Gleichgewichtssinn zum Ausbalancieren einer Links-Rechts-Symmetrie (also mit vertikaler Achse wie die eigene Leiblichkeit) eingesetzt wird. Damit wird das Kommutativgesetz[3] der Addition erkannt: Die Gliederung der 8 in »5 + 3« lässt sich spiegeln in »3 + 5«:

(O O O O O) + (O O O) | (O O O) + (O O O O O)

So wird das Kommutativgesetz als Wesensverwandtschaft, als Ordnungselement der Welt erfahren.

Die Addition

Die beiden Summanden scheinen also beliebig vertauschbar zu sein. Doch bei Aufgaben des alltäglichen Lebens ist das Kommutativgesetz der Addition gar nicht immer anwendbar. Es kann die Rechnung »5 + 3« eine andere Situation beschreiben als »3 + 5«. Zwar ist beides Mal der Endzustand (nämlich die Summe 8) gleich, aber Ausgangszustand und Werdegang unterscheiden sich voneinander; dies kann auch begrifflich nachvollzogen werden:

»5 + 3« bedeutet, dass zur Zahl 5 als vorgefundener oder gegebener »Augend«[4] (ruhender, passiver Anfangsbestand) der »Addend«[5] 3 als Zugabe hinzukommt, also die 5 vergrößert. Diese aktiv vergrößernde Rolle des Addenden kann mit dem Begriff »Auctor«[6] besonders betont werden.[7] Die Zusammenfassung zu ei-

2 Ernst Schuberth: Der Anfangsunterricht in der Mathematik an Waldorfschulen, Stuttgart ^{2}2001

3 kommutieren = umstellen, vertauschen

4 hier: »das zu Vergrößernde«

5 addieren = hinzugeben

nem neuen Ganzen ergibt die Summe oder den aktuellen Endbestand: Beim Kaufmann vergrößert sich der morgendliche Kassenbestand durch die Tageseinnahmen auf den Schlussbestand am Abend. Das Wort »zusammenzählen« beschreibt diesen Vorgang bildhaft, denn am Abend wird der gesamte Kasseninhalt (bestehend aus der morgendlichen Geldmenge in der Kasse, vermehrt um die Tageseinnahmen) nun nicht mehr nach seiner Herkunft unterschieden, sondern gemeinsam (= zusammen-) gezählt. Damit wird das neue Ganze festgestellt.

Bei diesem Bild aus dem kaufmännischen Bereich wird auch deutlich, dass die Reihenfolge der beiden Summanden nicht mehr beliebig ist oder ausgetauscht werden darf, weil die Rechnung sonst einen völlig anderen Geschäftsverlauf beschreiben würde.

Dies fällt besonders dann auf, wenn bei einem geringen Anfangsbestand durch rege Geschäfte ein großer Endbestand entsteht. Würden die beiden Posten ausgetauscht, so würde die scheinbar gleiche Addition zwar eine Firma mit gleich voller Kasse, aber besorgniserregend schlechtem Tagesgeschäft beschreiben. Es macht also durchaus Sinn, wenn der Lehrer bei Additionsaufgaben die Summanden sachgemäß unterscheidet und dies in ihrer Reihenfolge sichtbar macht.

Ebenso wichtig ist es, dass bei Aufgaben zur Addition die Summanden zusammenpassen und auch als Summe eine neue Einheit bilden können. Wenn in einem Korb bereits 5 Äpfel liegen und dann 3 Äpfel (und nicht etwa Birnen!) dazu gelegt werden, so enthält der Korb nachher die Summe von 8 Äpfeln als sinnvollen Inhalt des einen Korbes. Andere Benennungen können leicht von der Lebensrealität entfernen: Einem Brett mit 5 m Länge kann man zwar ein zweites mit 3 m hinzufügen, aber daraus wird kein Brett mit 8 m Länge.

Eine gesunde Empfindung für die sinnvolle Zusammengehörigkeit von Summanden wandelt sich später auch mühelos in ein sicheres Gespür dafür um, wie Brüche zu addieren bzw. subtrahieren sind: Addition und Subtraktion setzen zusammenpassende, d.h. gleichartige Dinge, also auch gleichnamige Brüche voraus.

Die Umkehrungen der Addition

a) Subtraktion: Wegnehmen

Fragt man nun bei obiger Addition

5	+	3	=	8
Augend (Bestand)	+	Auctor (Zuwachs)	=	Summe

von der Summe zurück zum Anfangsbestand, so muss der Zuwachs rückgängig gemacht werden:

6 Auctor = Vergrößerer, Steigerer (vgl. »Auktion« = Versteigerung)

7 ausführlich begründet von Louis Locher-Ernst in: Arithmetik und Algebra, Dornach 1984, S. 58

Summe – zurückzunehmender Zuwachs = alter Bestand

Aus dem Korb werden also die hinzugefügten 3 Äpfel wieder entnommen, und es liegen wieder nur noch die ursprünglichen 5 Äpfel darin. Die Rechnung beschreibt ein *aktives Wegnehmen*:

8 sind vorhanden		3 werden weggenommen		5 bleiben übrig
8	–	3	=	5
Minuend	–	Subtrahend	=	Differenz
(das zu Vermindernde)		(das Wegzunehmende)		(hier: *Rest*)

Das Wort »Differenz« bezeichnet üblicherweise das Ergebnis einer Subtraktion. Doch bedeutet es eigentlich »Unterschied«, und dies ist hier ausdrücklich nicht gemeint! Wir sprechen daher besser vom »übrig gebliebenen Rest«.

Nicht jede Addition eignet sich für eine solche Umkehrung: In dem oben angeführten kaufmännischen Beispiel müsste dazu der abendliche Kassenbestand gezählt werden und die (von einer Registrierkasse saldierten) Tageseinnahmen abgezogen werden, um den morgendlichen Anfangsbestand festzustellen – ein völlig unrealer Vorgang!

Bei einer echten Subtraktion muss also die Verminderung augenfällig wahrnehmbar sein, damit der Restbestand durch Abziehen feststellbar ist. Dies ist der Fall, wenn ich etwas willentlich ausgebe, weggebe oder verschenke: »Evelyn hatte von ihren letzten Ferien noch 15 Münzen aus Österreich aufbewahrt, die inzwischen selten geworden sind. Sie schenkt ihren beiden Freundinnen jeweils 3 davon. Wie viele bleiben ihr selbst übrig?«

b) Unterschied bilden

Gewöhnlich wird in der Mathematik bei der Umkehrung der Addition

$$5 \quad + \quad 3 \quad = \quad 8$$

nicht darauf geachtet, ob man von der Summe ausgehend nach dem ersten oder nach dem zweiten Summanden fragt. Das Kommutativgesetz der Addition erlaubt die Vertauschung der beiden Summanden, die Rückfrage nach jedem der beiden ist daher rechnerisch gleichwertig, und die in a) ausgeführte Subtraktion wäre übertragbar auf

$$5 \quad + \quad ? \quad = \quad 8 \quad \rightarrow \quad 8 \quad - \quad 5 \quad = \quad 3$$

wenn vorher die Summanden 5 + 3 zu 3 + 5 vertauscht würden. Es sind auch die gleichen Benennungen (Minuend, Subtrahend und Differenz) und dasselbe Rechenzeichen dafür üblich. Der Beschreibung im Unterricht könnten aber andere Begriffe durchaus hilfreich sein, wenigstens die deutliche Trennung von »Rest« (bei der 1. Umkehrung als echtes Abziehen) und »Unterschied« (bei der 2. Umkehrung als Vergleich). Bei unserem obigen Apfelkörbchen hieße diese Umkehrung der Addition:

»Anfangs waren 5 Äpfel im Korb, danach 8; wie viele kamen dazu?«

Es wird weder nach der Summe (durch Dazuzählen; Addition) noch nach dem Anfangsbestand (durch Wegnehmen oder Abziehen; Subtraktion) – sondern es wird rückgefragt nach der aktiven Vermehrung. Bekannt sind also End- und Anfangsbestand, und man fragt nach dem dazwischenliegenden Prozess. Der Unterschied (die Differenz) zwischen den beiden Zuständen lässt rückfolgern auf die stattgefundene Veränderung.

Doch nicht nur Veränderungen durch Addition lassen sich damit rückfragen, sondern auch solche durch Subtraktion: »Im Körbchen waren 8 Äpfel, jetzt sind nur noch 5 darin; wie viele wurden heraus genommen?« Auch hier wird der geschehene Vorgang durch das Betrachten des Unterschiedes rekonstruiert.

Beide Male findet ein Vergleich von zwei Zuständen statt. Verzichtet man auf die eigentliche Handlung in der zeitlichen Abfolge von Anfang und Ende, so kann man im räumlichen Nebeneinander die Signatur dieser zweiten Umkehrung der Addition deutlicher aufzeigen:

»Hier sind zwei Körbchen mit Äpfeln; in einem sind 8 Äpfel, in dem anderen nur 5. Wie groß ist der Unterschied?« – oder: »Wie viele fehlen dem zweiten Körbchen, damit es gleich voll sein könnte?«

Es geht also nicht um Wegnehmen, sondern um ein neutral betrachtendes, ja fast *passives Vergleichen* von zwei Zuständen. Der damit beanspruchte Gleichgewichtssinn fordert das innere Miterleben des nötigen Gegengewichts heraus, mit dem ein Ausgleich ermöglicht wird. Die angesprochenen Seelenfähigkeiten sind das (manchmal auch schmerzliche) Empfinden des Mangels wie auch das feine Abwägen von Unterschieden (differenzieren). Gesteigert werden diese Fähigkeiten durch den (Ent-)Schluss hin zur Aktivität, welche den einen Zustand in den anderen überführen und die beiden unterschiedlichen Dinge wieder verbinden kann. Im kaufmännischen Bereich ermöglicht diese Rechnungsart den vorurteilsfreien, objektiven Blick auf Erfolg oder Misserfolg der Geschäftstätigkeit: In der Jahresbilanz wird die Summe des gesamten Vermögens als Momentaufnahme festgestellt; der Vergleich mit der Vorjahresbilanz ermöglicht den Schluss auf Gewinn oder Verlust innerhalb des Geschäftsjahres.

c) Rest oder Unterschied?

Betrachtet man also bei Vorgängen des Lebens die Bedeutung des Unterschiedes, dann wird man dafür auch die richtigen Beispiele finden. Man wird darauf achten, dass man zwei Zustände zu vergleichen hat, die durch ein reales Geschehen auseinander hervorgehen können. Genauso wird man leicht entdecken, bei welchen Vorgängen nach dem Rest gefragt ist und deswegen nicht verglichen, sondern weggenommen (subtrahiert) werden soll.

Häufig umgehen wir das »echte Abziehen«, weil es uns leichter fällt, den Unterschied zu bilden. Stehen beim schriftlichen Abziehen etwa die Zahlen 8 und 5 untereinander (also: 8 – 5), so wird die Aufgabe »8 weg 5« in der Regel durch »wieviel fehlt von 5 auf 8?« ersetzt (oder man weicht auf die Addition »5 und wieviel sind 8?« aus). In der Tat sind Beispiele, in denen vergleichend gerechnet wird, dem Leben oft näher als diejenigen der Subtraktion.

Diese Eigenart illustrierte R. Steiner[8] in einem Seminarkurs für englische Waldorflehrer besonders bildhaft. »Gewöhnlich macht man es so: Etwas ist gegeben, man soll etwas abziehen, und dann bleibt etwas übrig. Aber im Leben kommt es viel häufiger vor, dass man dasjenige, was man ursprünglich bekommen hat, und dasjenige, was übrig geblieben ist, weiß, und man muss dasjenige, was verloren gegangen ist, aufsuchen … Dadurch bekommen Sie Leben in den Unterricht hinein.«[9] In seiner Schilderung für die Lehrer erzählt er nun, wie Mariechen 25 Äpfel abholte, davon aber unterwegs 15 verlor und nur 10 nach Hause brachte. Das gewählte Beispiel überzeugt auch noch den heutigen Leser rasch darin, dass man sinnvoll nur nach dem Verlust fragen kann.

Doch mal ehrlich: Wie oft stellt man ähnliche Aufgaben mit der Frage, wieviel übrig bleiben, wenn man so und so viel verloren hat? Wie lebensfremd das ist, fällt erst dann auf, wenn man sich den Vorgang bildhaft vorstellt: Wenn jemand weiß, wie viel er verloren hat, muss er das Verlieren doch genau beobachtet haben – aber dann hätte er es doch wieder aufgehoben und mitgenommen! Tatsächlich geht es im Leben so zu, dass man beim Ankommen bemerkt, dass man nicht alles dabei hat. Dann stellt man sich die Frage: »Wieviel fehlt mir denn?« oder: »Wie groß ist der Unterschied zwischen dem ursprünglich Abgeholten und nun tatsächlich Mitgebrachten?« Vor allem verrät die »gefundene« Antwort, was man effektiv noch zu suchen (besser: zu finden) hat.

Dennoch gibt es auch genügend Aufgaben, in denen das Subtrahieren berechtigt ist. In Fachgeschäften für Bodenbeläge werden beispielsweise an den Rollen die abgeschnittenen Stücke notiert und der verbliebene Rest jedes Mal neu ausgerechnet. Auf diese Weise weiß man stets, wieviel laufende Meter sich noch auf der Rolle befinden, ohne dass die große, schwere Rolle umständlich abgewickelt werden muss. Lagerverwaltungen mit einer zentralen Rechnereinheit, in der alle Zu- und Abgänge erfasst werden, können mit der gleichen Methode den jeweils aktuellen Lagerbestand angeben (die trotzdem nötigen Korrekturen erfolgen bei der Inventur). Auch von unserem 200er-Pack Malpapier können wir nach drei Maltagen bei 32 Schülern auf einen Restbestand von 104 Blättern schließen, ohne den Rest zu zählen. *(wird im Aprilheft 2002 fortgesetzt)*

Zum Autor: Adolf Fischer, Jahrgang 1946, verheiratet, fünf Kinder; nach Feinmechaniker-Lehre Studium der Mathematik und Physik in Tübingen; Oberstufenlehrer an der Waldorfschule Ulm; Mitbegründer der Waldorfschule am Illerblick in Ulm als Klassenlehrer.

Die Grundzüge dieses Artikels entstanden anlässlich der Arbeit des Autors im Hauptunterricht der 1. und 2. Klasse (1990/91). Sie orientierten sich vor allem an der gründlichen Darstellung der Rechenarten von Louis Locher-Ernst *(Arithmetik und Algebra)*. Zwischen-

8 Rudolf Steiner: Die Kunst des Erziehens … (Torquay 1924), GA 311, Dornach [4]1979, S. 88