Im Leben mit etwas rechnen können

Sechs Aspekte der Grundrechenarten – Teil 2

Adolf Fischer

Die Multiplikation

Die Multiplikation kann als zusammenfassende Addition aufgefasst werden, wenn es darum geht, gleiche Dinge mehrfach zu addieren. In diesem Sinne ist die Multiplikation eine echte Steigerung der Addition. Doch haben die beiden malzunehmenden Zahlen auf Grund ihrer Herkunft eine auffallend verschiedene Bedeutung: Eine Zahl – der Multiplikator – steht für die Anzahl der gleichartigen Dinge, die zweite Zahl – der Multiplikand – nennt eines der mehrfach auftretenden Dinge nach Zahl, Maß und Bezeichnung. Den Zugang zu diesen Wesensunterschieden ermöglichen bildhafte Beispiele aus dem Lebensumfeld:

Wir greifen *dreißig Mal* in den großen Sack und *nehmen* jedesmal 5 Nüsse heraus. Wie viele haben wir insgesamt herausgenommen? Wie viele Nüsse liegen nun vor uns auf dem großen Haufen? Die dazu gehörende Rechnung heißt:

5 + 5 + 5 + …; also »30-mal die 5 (Nüsse)«,

eine Summe aus 30 gleichen Summanden, die nicht mehr unterschieden werden können.

Die Einzelportion von 5 Nüssen wird also 30-mal aneinander gelegt (aufaddiert) zu einem neuen Ganzen. Welch ungeheuren Gedankensprung bedeutet es für ein Kind, wenn es diesen Vorgang nun auf einen Schlag mit den Worten »ich nehme die 5 Nüsse (mit) 30 Mal« zusammenfassen und vielleicht ohne die Fünfer-Reihe aufzusagen von der 5 auf 150 als Dreißigfaches schließen kann. Jedenfalls wird es die 150 Nüsse sicher nicht abzählen! Diesen Schritt kann man unterstützen, wenn jeweils 5 Nüsse in ein Säckchen gepackt werden. Der Verlust der äußeren Anschauung wird dann durch innere Vorstellung überwunden, und es bleibt nur noch der aktive Multiplikator als reine Anzahl sichtbar.

30	x	5	=	150
(aktiver) Multiplikator	x	(passiver) Multiplikand	=	Produkt
vervielfachende Anzahl	x	Größe der Portion	=	Ergebnis als neues Ganzes

Dabei ist die Bezeichnungsweise in der Literatur unterschiedlich; am gebräuchlichsten ist jedoch die umgekehrte Reihenfolge: »Multiplikand x Multiplikator« (erst wird die zu behandelnde Zahl genannt – oder »eingegeben« – und danach die vervielfachende Zahl). Dies entspricht vor allem der Anordnung beim schriftlichen »Malnehmen mit Staffel«.

Die im obigen Text gewählte Reihenfolge schließt dagegen an die Schreibweise von bemaßten Größen an. So würden 6 m die entstehende Länge beschreiben, wenn man sechsmal einen Meter nimmt, also 6 x 1 Meter; bei unserer Schreibweise wäre demnach die erste Zahl als Multiplikator aufzufassen.[1]

Ähnlich wie bei der Addition entsteht hier das Produkt auch nicht aus dem Nichts, sondern es muss schon zuvor als Ganzes existieren können (in unserem Beispiel also der Vorrat von 150 Nüssen im Sack). Daher ist es auch bei der Multiplikation gerechtfertigt, vom Produkt als Ganzem auszugehen und dieses in Faktoren zu gliedern.[2]

Dem Übergang vom Abzählen zum Addieren vergleichbar, wird nun der Zahlenraum in Zweier-, Dreier-, oder Fünferschritten rhythmisch durchschritten. So entdeckt das Kind ein reiches Beziehungsgeflecht der Zahlen untereinander und belebt dieses seelisch als Verwandtschaften und Freundschaften. Es lernt größere Zahlen als mögliche Produkte kleinerer Zahlen kennen.

Auf die gleiche Weise wird den Kindern das Kommutativgesetz der Multiplikation als Struktur des Zahlenraumes vertraut. Besonders gut kann dies erlebt werden, wenn eine teilerreiche Zahl in verschiedene Produkte zerlegt wird (also ein ähnliches Vorgehen wie bei der Addition), z.B.: »was 24 alles sein kann«:

»24 = 1 x 24 = 2 x 12 = 3 x 8 = 4 x 6 = 6 x 4 = 8 x 3 = 12 x 2 = 24 x 1«.

Die Symmetrie tritt hier nicht mehr bildhaft unmittelbar aus der Anschauung entgegen, sondern wird im rhythmischen Prozess miterlebt. Erst wenn dies für das Kind vertraut geworden ist, kann aus einer reinen Zahlenaufgabe (z.B. 7 x 8) auf das invariante Produkt der gespiegelten Aufgabe (hier: 8 x 7) geschlossen werden. Von diesem Zeitpunkt ab können die beiden Zahlen bei der Rechnung als gleichwertige Faktoren (als »Macher«) des Produkts (als »Arbeitsergebnis«) anerkannt werden.

Bei realen Aufgaben kann man die Faktoren meistens nicht austauschen, ohne den Sinn zu verändern. Es ist in der Lebenswirklichkeit ein großer Unterschied, ob 30-mal mit der Hand jeweils 5 Nüsse (also fassbar und leicht zählbar) aus dem Sack geholt werden, oder ob »5-mal 30 Nüsse« als Aufgabe verlangt werden (dazu müssten wir zuerst je 30 Nüsse in Körbe hineinzählen, dann dürfte man sich davon 5 solcher Körbe samt Inhalt nehmen).

Wenn einer der beiden Faktoren ein Bruch ist, wird dies noch deutlicher. Selbst ein so einfaches Beispiel wie »8 x $\frac{1}{2}$« unterscheidet sich in der Veranschaulichung erheblich von »$\frac{1}{2}$ x 8«. Denn »8 x $\frac{1}{2}$« beschreibt (mit der oben getroffenen Vereinbarung, dass der erste Faktor den aktiven Multiplikator bezeichnet) die Tatsache, dass achtmal eine Hälfte (z.B. Nusshälfte) genommen wird.

Beim Tausch der beiden Faktoren entsteht die Rechnung »$\frac{1}{2}$ x 8«, welche inhaltlich anders zu beschreiben ist: Jetzt würden in einem Korb acht ganze Nüsse liegen, und man darf sich davon die Hälfte, also 4 ganze Nüsse, nehmen.

Kinder erleben die beiden Versionen trotz des rechnerisch gleich großen Ergebnisses recht unterschiedlich. Im ersten Falle sind die Nüsse bereits geknackt, im zweiten Falle

1 vgl. Locher-Ernst, a.a.O., S. 27

2 Dies entspricht der konsequenten Fortsetzung der Addition (eingeführt als Gliederung einer Summe in ihre Summanden).

Foto: Lutz

stehen dem Verzehr die noch unverletzten Nussschalen im Wege; und falls eine taube Nuss darunter war, ist die erste Methode mit 8 halben Nüssen ganz sicher die gerechtere!

Die Umkehrung der Multiplikation

Weil bei reinen Zahlenaufgaben die Faktoren eines Produkts beliebig tauschbar sind, lautet die umgekehrte Rechnungsart lediglich: Das Produkt und ein Faktor sind bekannt, der zweite Faktor soll berechnet werden. Beim Produkt 2 x 9 = 18 oder auch 9 x 2 = 18 wird als Umkehrung aus dem Ganzen (18) und einem Faktor (z.B. 9) der zweite Faktor bestimmt mittels einer Division:

18	:	9	=	2
Dividend	:	Divisor	=	Quotient
(zu teilende Größe)	:	(Teiler)	=	(Anteil)

Dividend und Divisor dürfen dabei nicht ausgetauscht werden, wohl aber die Zahlen von Divisor und Quotient (ohne ihren Namen mitzunehmen):

18	:	2	=	9
Dividend	:	Divisor	=	Quotient

ist formal eine gleichwertige Umkehrung obiger Multiplikation.

Die bei der Division benutzten Begriffe sind auch aus anderen Lebensbereichen bekannt: Division als (militärische) Ab- oder Unter-Teilung, die Dividende als der zu verteilende Gewinn und die Quote als Anteil.

Beim Rechnen in den unteren Klassen sind aber für die Aufgabe 18 : 9 bereits zwei

Sprechweisen üblich und auch mit gleicher Berechtigung möglich:

a) »18 geteilt durch 9 ist 2« (oder auch: 18 verteilt an 9 ergibt 2)
b) »die 9 ist in der 18 zweimal enthalten«.

Die Benennung (a) stellt die eigentliche Division, also eine echte (Auf-)Teilung dar, (b) erinnert dagegen an die Herleitung des Produkts (aus der mehrfachen Addition von gleichen Summanden); »die 18« und »die 9« klingen sehr nach vergleichbaren Größen, und das Ergebnis »zweimal« zeigt auf den ehemaligen Multiplikator (Anzahl).

Die Unterscheidung fällt leichter, wenn die reinen Zahlen mit einer Bedeutung unterlegt werden, damit sie reale Vorgänge spiegeln können. Dazu erinnern wir uns an das anfangs benutzte Beispiel: »Dreißig mal fünf Nüsse sind 150 Nüsse«.

Dabei ist der Multiplikator 30 eine reine (An-)Zahl ohne Benennung. Er zeigt, wie viele von den gleichen »Portionen« der Größe »5 Nüsse« zusammengefasst werden. Das Produkt trägt dann wieder die gleiche Benennung wie der Multiplikand. Bei der umgekehrten Betrachtungsweise müssten wir die Gesamtzahl von 150 Nüssen in 30 Portionen zu je 5 Nüssen sortieren. Beim Anschauen dieser als Produkt gegliederten Menge lassen sich die beiden rechnerischen Umkehrungen des Malnehmens bildhaft schildern:

a) Verteilen: »Wenn man 150 Nüsse an 30 Kinder verteilt, erhält jedes eine Portion von 5 Nüssen«, oder als Division: »150 Nüsse geteilt durch 30 ergibt 5 Nüsse«
b) Enthaltensein: »Aus der Menge von 150 Nüssen kann man die Portion von 5 Nüssen 30-mal heraus nehmen«, oder: »in 150 Nüssen sind 5 Nüsse 30-mal enthalten«

Ähnlich den beiden Umkehrungen der Addition zeigt sich auch hier, dass nur (a) eine echte Rechenumkehr darstellt, weil sie die Aktivität des Multiplikators rückwärts zum passiven Multiplikanden verfolgt. Die Wirkung ist also ähnlich der »echten« Subtraktion (Abziehen) als 1. Umkehrung der Addition.

Die zweite Umkehrung (b) – also die Frage nach dem Multiplikator – findet ihre Entsprechung in der zweiten Rückfrage bei der Addition: Wie damals findet auch jetzt ein Vergleich zwischen dem »Anfangszustand« (hier: Multiplikand) und dem »Endzustand« (hier: Produkt) statt. Wieder wird nach dem Verbindenden zwischen zwei Zuständen gefragt, nach ihrem gegenseitigen »Verhältnis« zueinander.

Dieser wesentliche Unterschied spielt beim späteren Bruchrechnen eine große Rolle. Damit die Umkehrung der Multiplikation bei Brüchen gut verständlich wird, lohnt es sich, näher darauf einzugehen und sie auch durch Übungsaufgaben bei den Schülern zu festigen. Sorgfältige sprachlich differenzierte Ausdrucksweise und bildhaft-stimmige Aufgaben sind eine wertvolle Hilfe, trotz gleichen Rechenzeichens die beiden Verfahren klar getrennt zu erleben.

a) Das Verteilen (echte Division)

Dieser Aufgabentyp tritt immer dann auf, wenn ein zusammengehöriger Vorrat »gerecht« – also zu gleichen Teilen – in eine gegebene Anzahl von Einzelteilen oder »Portionen«

3 R. Steiner, a.a.O. (GA 311), S. 86

aufgeteilt werden soll. Diese Art von »numerischer« Gerechtigkeit wird von Kindern innerlich intensiv miterlebt. Der Widerwillen gegen das »christliche Teilen«[3] beruht vor allem darauf, dass es von außen und moralbehaftet erwünscht wird. Bei einem Gespräch über Gerechtigkeit kann man von den Kindern gute Gründe (einsichtige Notwendigkeiten, Bedürfnisse) suchen lassen, aus denen man von der rechnerischen Gleichheit zu Gunsten einer lebensnahen Gerechtigkeit aus freier Einsicht abweicht. Wenn die Kinder gleichzeitig eine gute Kultur des freien Schenkens und Helfens pflegen, muss auch der in Klassenstärke auftretende Gerechtigkeitswahn nicht mehr überbewertet werden.

Bei Aufgaben zu diesem Thema empfehlen sich solche, welche einen bemaßten Dividenden und eine dazu passende und sinnvolle Aufteilung in Quoten (Portionen) haben. Der Divisor (Teiler) kann anfangs noch bildhaft an eine Personenzahl gebunden sein. Die Sprechweise lehnt sich zunächst eng an die Aufgabenthematik an und löst sich dann zunehmend von ihr; z.B.:

72 € verteilt an 36 Kinder ergibt 2 € (je Kind)
72 € geteilt durch 36 sind 2 €

Wenn es sich um »aufgehende« Rechnungen handelt, kann der Übergang zur Bruchrechnung bereits vor der 4. Klasse sprachlich und inhaltlich solide vorbereitet werden:

Der sechsunddreißigste Teil von 72 € ist (sind) 2 €
Einer von *sechsunddreißig* (gleichen) *Teilen* von 72 € beträgt 2 €

und ab Klasse 4:

Ein *Sechsunddreißigstel* von 72 € ist 2 €
bzw. als Rechnung: $^1/_{36}$ x 72 € = 2 €

Eine echte Division ist also stets daran zu erkennen, dass der gegebene Dividend (das »Ganze«; hier der Gesamtbetrag von 72 €) und der zu berechnende Quotient (der »Anteil«; hier das Ergebnis von 2 €) eine gemeinsame Qualität besitzen, die sich in einem gemeinsamen Maß beschreiben lässt (hier das »Geld« mit dem Maß »€«). Im Sachrechnen der 3. Klasse können dann Aufgaben belegen, dass es oft praktischer ist, wenn vor der Aufteilung ein feineres Maß gewählt wird (z.B. Zentimeter statt Meter), um die Rechnung dadurch wesentlich zu erleichtern.

b) Das Enthaltensein (»Messen«)

Bei der Frage, wie oft eine bestimmte Portion (der Anteil) im Vorrat (dem Ganzen) enthalten ist, wird deren Vergleichbarkeit als selbstverständlich vorausgesetzt. Der Vergleich der beiden Größen führt auf die Anzahl (eine reine Zahl ohne Maßbezeichnung) der Teile, welche im Ganzen zu finden sind. Diese Rechnungsart lässt sich in anschauliche, inhaltlich treffende und auch sprachlich gut formulierbare Bilder fassen:

»Im Garten steht ein volles Regenfass mit insgesamt 180 Liter Wasser. In die Gießkanne passen 12 Liter. Wie oft könnte man diese mit dem Wasser des Fasses füllen?«

Das große Fass mit seinen 180 Litern wird von dem kleineren Gefäß, der Gießkanne mit 12 Litern Fassungsvermögen ausgeschöpft. Weil 12 in 180 genau 15-mal hineinpasst, ist im Fass das Volumen von 15 Gießkannen enthalten. Die Gießkanne stellt ein Schöpfmaß (Hohlmaß) dar, mit dem der Inhalt des Fasses gemessen wird.

Mit der Frage nach dem Enthaltensein werden also Größen durch andere Maße messbar. Das »neue Maß« muss dazu nicht einmal im Ganzen sichtbar enthalten gewesen sein.

Vom Enthaltensein zur Proportion

Die Anzahl der Teile im Ganzen beschreibt aber auch, in welchem Verhältnis der Teil und das Ganze zueinander stehen. Damit lassen sich Maßbeziehungen von verwandten Größen als Proportion beschreiben, etwa um wie viel mal ein Rechteck länger ist als breit. Der Begriff des gegenseitigen Verhältnisses wird ab der 6. Klasse ein wesentlicher Grundstein für den weiteren Aufbau der Mathematik. Prozentrechnen und Dreisatz sind dazu die ersten Übungsfelder.

Damit wird auch die Bruchrechnung aus Klasse 4 auf ein neues Qualitätsniveau gesteigert. Zunächst waren die Brüche bildhaft als Bruchteile eines Ganzen angesehen worden, nun können sie als vergleichende Proportion zwischen verschiedenen Ganzen neue Beziehungen herstellen. Gemäß der ursprünglichen Bedeutung des Enthaltenseins wird man sich zunächst auf den Vergleich von qualitäts- und maßverwandten Größen beschränken.

Doch auch unabhängig vom Rechenunterricht kommt den Zahlen- und Größenverhältnissen eine eminente Bedeutung zu: Verhältnisse oder Proportionen beschreiben Formzusammenhänge unabhängig von absoluten Größen oder Maßen. Statt dem rein äußeren Vorgang einer bloßen Größenmessung erfasst die Proportion innere Zusammenhänge und Formkräfte.

Maßproportionen von Figuren, Bildern und geometrischen Körpern bis hin zu Plastik und Architektur korrespondieren mit seelischen Empfindungen und erheben letztere in den Bereich der objektiven Beschreibbarkeit. Auch alle rhythmischen Vorgänge beruhen auf Zeitverhältnissen, also zahlenmäßig erfassbaren Proportionen. Die musikalischen Intervalle spiegeln sich in den Verhältnissen von Saitenlängen.

Der durch die künstlerisch-bildnerischen und sprachlich-musikalischen Fächer geförderte Schönheitssinn und die sachgemäße Pflege der Proportionslehre innerhalb der Mathematik bestärken sich dann gegenseitig. Dem Empfindungsreichtum im Künstlerischen wird gedankliche Klarheit zugeordnet; die »kühle« mathematische Gedankenwelt erhält vom Schönheitsempfinden die nötige Wärme: Ein glückvolles Zusammenwirken der beiden kann die seelischen Fähigkeiten des Kindes umfassend befruchten, vertiefen und klären.

Proportionalität als Grundlage für den Dreisatz

In der 6. Klasse wird dann die Verallgemeinerung möglich, mit der Bezüge zwischen maßfremden Größen festgestellt werden können (Proportionalitätsfaktoren). Alle Dreisatz-Aufgaben beruhen darauf, dass zwischen zwei veränderlichen Größen (z.B. Preis und Warenmenge) das gegenseitige Verhältnis erhalten bleibt. Meist lässt sich für den verbindenden Proportionalitätsfaktor ein bildhaft-charakterisierender Begriff finden, welcher den Zusammenhang anschaulich beschreibt. Alle relativen und »spezifischen« Maße gehören hierzu wie etwa: Kilopreis, Stundenlohn, Geschwindigkeit, Dichte usw.

Ausblick

Sowohl Addition wie Multiplikation ließen zwei verschiedene Umkehrfragen zu, so dass insgesamt sechs statt der üblichen vier Grundrechenarten zu unterscheiden waren. Fasst man die Umkehrung in strengem Sinne auf, nämlich dass die »Rechnung« rückgängig gemacht werden soll (vom Ergebnis zurück zur Anfangszahl), so gibt es jeweils nur *einen* »Rückweg« und daher auch nur *ein* Rechenzeichen (– und :). Ohne Bezug zu realen Größen entfällt bei reinen Zahlenrechnungen die Unterscheidung der beiden Umkehrungen sowieso, weil es dann bei Addition und Multiplikation nicht mehr auf die Reihenfolge der beteiligten Zahlen ankommt. So erhalten wir im Wesentlichen die gewohnten vier Grundrechenarten:

Addition Umkehrung: *Subtraktion*
(Abziehen, das Ergebnis ist der Rest)

Multiplikation Umkehrung: *Division*
(Verteilen, das Ergebnis ist der Anteil)

Doch das Rechnen soll sich an das konkrete Leben anschließen lassen und es sinnfällig wiedergeben können. Dieser Anforderung wird aber die Vierzahl der Grundrechenarten nicht gerecht. Daher haben wir neben der jeweils »echten« (oder aktiven) Umkehrung noch die »passive Umkehrung« beschrieben und einen Rechenvorgang entdeckt, bei dem wir Größen vergleichen. Das Bilden von Unterschied bzw. Verhältnis sieht von äußerer Aktivität ab, doch ruft der nötige Vergleich zweier Größen oder Zustände innere Beteiligung hervor. Vergleichendes Rechnen weckt Interesse über die Einzelaufgabe hinaus. Steiner weist in seinen zahlreichen Ausführungen zum Rechnen häufig darauf hin, wie ein vergleichendes Vorgehen dem gewöhnlichen »zielgerichteten« Rechnen vorzuziehen sei.

Die erhöhte Aufmerksamkeit auf Unterschiede und Verwandtschaften innerhalb der Grundrechenarten bereichert und befruchtet den Unterricht wesentlich. Sie schärft den Blick des Lehrers dafür, wie Kinder rechnend den Zahlenraum und seine Struktur verstehen und ordnen lernen. Sie ebnet auch Wege zum Verständnis dafür, wie das Rechnen auf die Temperamentsfärbungen der Kinder Rücksicht nehmen kann. In einem späteren Artikel soll die Beziehung der Rechenarten zu den Temperamenten geknüpft werden.

Zum Autor: Adolf Fischer, Jahrgang 1946, verheiratet, fünf Kinder; nach Feinmechaniker-Lehre