Bruchrechnen – leichter gemacht

Wege in eine schwierige Rechnungsart

Arnold Bernhard / Adolf Fischer

Rechenerfahrungen mit ganzen Zahlen

Nicht nur an Waldorfschulen erleben Lehrer leidvoll, dass viele Schüler mit dem Bruchrechnen nicht wirklich vertraut werden. Wir müssen uns daher um Wege bemühen, auf welchen die Schüler in diese Rechnungsart hineinwachsen können.

Den Anfang des Bruchrechnens wird ja immer eine anschauliche Darstellung von Bruchstücken eines Ganzen machen, und einfache Beziehungen von Bruchstücken zueinander werden noch recht bildhaft vorgestellt. Die allmählich entstehenden Einsichten in die neue Rechnungsart benötigen nun den Rückhalt der eigenen Rechenerfahrungen, welche an den ganzen Zahlen gebildet wurden. An folgende Erfahrungen kann angeschlossen werden:

Jede ganze Zahl (außer den Primzahlen) lässt sich multiplikativ in ihre Faktoren zerlegen: Diese sind Bruchteile der ganzen Zahl. So lässt sich die Größe von Bruchstücken ganzzahlig ausdrücken. An dieser Nahtstelle von ganzen Zahlen und echten Brüchen können die Schüler den Umgang mit Brüchen mit Hilfe ihrer Fertigkeiten aus dem bisher vertrauten Milieu der ganzen Zahlen erüben.

Drei Etappen eines solchen Weges von Erfahrungen zu Rechenregeln werden im Folgenden dargestellt. Die angegebenen Grundübungen müssen dabei nicht fein säuberlich getrennt nacheinander an die Reihe kommen, sie können mit fortschreitender Übung mehr und mehr vermischt werden.

Bruchteile von ganzen Zahlen

In der ersten Rechen-Epoche der vierten Klasse führen wir die Kinder in das Bruchrechnen ein. Durch Zeichnen, Ausschneiden, Aneinanderlegen und Vergleichen von Kreisausschnitten ermöglichen wir ihnen ein anschauliches Umgehen mit Bruchteilen der Einheit mit dem Bezug zum ganzen Kreis.

An der Form des Teilstückes entwickeln wir das Gefühl für diese neuen Größen. Mit solchen Tätigkeiten bilden die Schüler erste, anfängliche Begriffe von Bruchzahlen aus, auch wenn sie damit noch nicht rechnerisch frei umgehen können. Und man dränge sie nicht zu früh dazu. Denn diese Begriffe sollen erst von Rechenerfahrungen gesättigt werden und sich setzen können und danach neu aufgegriffen, gefestigt und geklärt werden. Das kann dadurch geschehen, dass wir die Schüler ganzzahlig aufgehende Bruchteile von Zahlen ausrechnen lassen:

Wie groß ist ein Drittel von 6, 15, 21, 27 …? Kurz geschrieben:

$^1/_3$ von 6 = … $^1/_3$ von 15 = … $^1/_3$ von 21 = … ?

Die Aufgaben dürfen, ja sollen am Anfang ganz einfach bleiben. Neue Rechnungsarten haben ihren eigenen Reiz und benötigen keine schwierigen Beispiele, um das Interesse zu wecken. Erst wenn sich das Neue im elementaren Zahlbereich fundiert hat, üben wir es auch bei größeren Zahlen. Dabei ermuntern wir die Schüler, diese schwereren Aufgaben zu versuchen, ohne dass alle Schüler alle Aufgaben lösen müssen.

Mit den Bruchteilen von ganzen Zahlen setzen die Schüler bereits Gewohntes in einer neuen Aufgabenstellung ein: Wir gehen aus dem Einmaleins zurück zur multiplikativen Zerlegung von Zahlen. Wollen wir $^1/_7$ von 42 bestimmen, so reihen sich verschiedene Fragen daran: Können wir 42 durch 7 teilen? Von welcher Zahl ist 42 das Siebenfache? Weil 42 gleich 7 x 6 ist, folgern wir: $^1/_7$ von 42 ist 6.

Statt dem »einfachen« Bruchteil $^1/_7$ (also einem »Stammbruch«) lassen wir nun auch nach Vielfachen davon suchen, also $^3/_7$ von 42. Wir gehen vom ursprünglichen

»$^1/_7$ von 42 ist 6« aus und nehmen dann das Dreifache:

»$^3/_7$ von 42 sind dann 3 x 6 also 18«.

Dies sind nun schon längere Gedankenketten für den Schüler, doch gerade dieses innere Suchen nach zusammenpassenden, aufeinanderfolgenden Gedanken aktiviert die Schüler innerlich! Dabei haben sich die Schüler nicht nur an das Einmaleins erinnert, sondern sie haben erste Schlussrechnungen durchgeführt.

Selbst Prozentrechnungen der Art: »3% von 2.400 €« lassen sich damit bearbeiten: $^1/_{100}$ von 2400 = 24, also sind $^3/_{100}$ von 2400 dreimal 24 oder 72.

Doch entscheidender ist das Erlebnis: Der Nenner wirkt als Teiler, als Divisor; der Zähler wie ein Vervielfacher oder Multiplikator; jeder Bruch vereinigt in sich Division und Multiplikation. Die Schüler werden so nach und nach übend in das Grundwesen der Brüche eingeführt.

Und wenn im Laufe des Schuljahres Bruchrechnen eine Zeit lang nicht mehr vorgekommen ist, so kann man es mit diesen Bruchteilen ganzer Zahlen immer wieder auffrischen, bis in obere Klassen hinauf.

Welcher Bruchteil ist es?

Den Anteil des Ganzen in Bruchform zu finden, wird schwieriger empfunden, als vorgegebene Bruchteile von ganzen Zahlen zu berechnen. Die Frage: »21 ist welcher Bruchteil von 35?« ist ein völlig andersartiger Vergleich als etwa: »Wie groß ist der Unterschied zwischen 21 und 35?« Die Suche nach dem Bruchteil regt eine viel lebhaftere Gedankensuche an; wir müssen in den inneren Aufbau der Zahlen hineinschlüpfen und den gemeinsamen mulitiplikativen Baustein finden:

21 ist dreimal 7; 35 ist fünfmal 7 , also ist 7 der gemeinsame multiplikative Baustein. Fünfmal ist er in 35 enthalten. Daher ist 7 = $^1/_5$ v 35; und drei solcher Bausteine der Größe 7 sind in 21 enthalten: 7 = $^1/_5$ v 35; 21 = $^3/_5$ v 35.

Nicht alle Schüler werden schon nach wenigen Beispielen diese Gedankenschritte selbstständig durchlaufen können; viele ahnen es zunächst mehr. Um es ihnen näher zu bringen, wählen wir zuerst möglichst einfache Zahlenpaare. Dabei sollen die Zahlen jeweils nur aus zwei Primzahlen aufgebaut sein, und einer der Primbausteine soll in beiden Zahlen gemeinsam vorkommen. Die Schüler erkennen dann den für die Lösung gemeinsamen – und daher entscheidenden – Baustein des Paares leichter, und sie können wieder auf die entsprechende Einmaleins-Reihe zurückgreifen:

21 und 35 sind beide »Siebener-Zahlen«; 35 ist fünfmal 7 oder: 7 ist $^1/_5$ v 35;
die Siebener-Reihe führt in fünf Stufen auf 35: 7 – 14 – 21 – 28 – 35
also: $^1/_5$ – $^2/_5$ – $^3/_5$ – $^4/_5$ – $^5/_5$ v 35
und in der 3. Stufe sehen wir: 21 = $^3/_5$ v 35

Bei allen Schülern ist ein Zahlensinn veranlagt, wenn auch verschieden stark. Wir wekken und stärken ihn, indem wir mündlich rechnen lassen. Zahlen können wie innerlich »gesehen« werden. Diese innere Sicht kann durch zu ausführliches äußeres Aufschreiben überdeckt werden. Bei einfachen Zahlen lassen wir die Schüler rein im Kopf rechnen, also schreiben wir nur die Aufgabenstellung:

10 = ? v 15 und tragen das Resultat direkt ein: 10 = $^2/_3$ v 15
Im Kopf prüfen wir: ist $^2/_3$ v 15 = 10 ?
Ja, weil gilt: $^1/_3$ v 15 ist 5; und $^2/_3$ v 15 sind dann das Doppelte, also 10.

Für größere Zahlen kann dann die schriftliche Darstellung des Gedankenganges eine Hilfe sein:

15 = ? v 55 ; 15 = 3 x 5; 55 = 11 x 5; also: 5 = $^1/_{11}$ v 55 bzw. 15 = $^3/_{11}$ v 55

Kürzen und Erweitern

Es gibt auch Zahlenpaare, welche mehr als einen gemeinsamen multiplikativen Baustein haben.

Für 12 = ? v 18 mit 18 = 3 x 6 und 12 = 2 x 6
gilt: 6 = $^1/_3$ v 18 und damit: 12 = $^2/_3$ v 18
ebenso möglich ist: 18 = 6 x 3 und 12 = 4 x 3
also: 3 = $^1/_6$ v 18 und damit: 12 = $^4/_6$ v 18

Sowohl 2/3 v 18 als auch 4/6 v 18 sind beide 12, also gleich groß; dann müssen 2/3 und 4/6 also denselben Anteil von 18 genommen haben. In ihrer Wirkung sind 2/3 und 4/6 gleichwertig, sie müssen daher ihrem Zahlenwert nach gleich sein. Äußerlich gesehen sind Zähler und Nenner des zweiten Bruches doppelt so groß wie diejenigen des ersten.

Wir sagen: Der zweite Bruch ist gegenüber dem ersten mit 2 erweitert. Wenn wir umgekehrt Zähler und Nenner des zweiten Bruches durch 2 teilen, dann kehren wir zum ersten Bruch zurück: Wir kürzen den Bruch mit (oder »durch«) 2, wenn wir Zähler und Nenner durch 2 teilen.

Bei Zahlenpaaren mit ausgesprochen vielen gemeinsamen multiplikativen Bausteinen finden wir reichhaltige Beispiele, an denen wir charakterisieren können, was erweiterte und gekürzte Brüche sind. Betrachten wir zum Beispiel 24 und 36. Beide Zahlen können auf viele Arten als Produkt von zwei Zahlen dargestellt werden. Wir lassen uns von den Schülern mögliche Produkte mit einem gemeinsamen Baustein nennen. Die Vorschläge der Schüler schreiben wir auf, wie sie kommen, zum Beispiel in der Reihenfolge:

24 = 6 x 4	36 = 9 x 4	also 24 = $^{6}/_{9}$ v 36
24 = 2 x 12	36 = 3 x 12	also 24 = $^{2}/_{3}$ v 36
24 = 8 x 3	36 = 12 x 3	also 24 = $^{8}/_{12}$ v 36
24 = 4 x 6	36 = 6 x 6	also 24 = $^{4}/_{6}$ v 36
24 = 12 x 2	36 = 18 x 2	also 24 = $^{12}/_{18}$ v 36

Die Brüche $^{6}/_{9}$, $^{2}/_{3}$, $^{8}/_{12}$, $^{4}/_{6}$, $^{12}/_{18}$ beschreiben alle denselben Anteil, sie sind also alle gleichwertig.

Wir können fragen: Wie kommen wir
– vom ersten zum fünften? Durch erweitern mit 2,
– vom fünften zum zweiten? Durch kürzen mit 6,
– vom zweiten zum ersten? Durch erweitern mit 3.

Von allen Brüchen hat $^{2}/_{3}$ den kleinsten Zähler und den kleinsten Nenner. Alle anderen sind Erweiterungen von ihm und lassen sich auch wieder zu $^{2}/_{3}$ kürzen.

Auf diese Weise können die Schüler reichhaltige Erfahrungen mit Erweitern und Kürzen machen und danach die entsprechenden Definitionen verständig aufnehmen und sich merken:

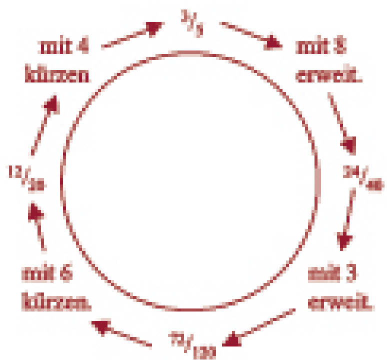
• *Einen Bruch erweitern heißt: Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren.*
• *Einen Bruch kürzen heißt: Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren.*

Durch Erweitern und Kürzen ändern wir den Zahlenwert eines Bruches nicht, wir geben ihm nur ein anderes Gewand. Das gekürzte Gewand mit dem kleinsten Zähler und kleinsten Nenner kleidet den inneren Zahlenwert am angemessensten, am knappesten. Sich frei bewegen können innerhalb einer Gemeinschaft von gleichwertigen Brüchen durch Erweitern und Kürzen ist eine wichtige Grundlage des Bruchrechnens, ohne die Addieren oder Subtrahieren von Brüchen nicht möglich ist.

Wir können zum Beispiel den Bruch $^{3}/_{5}$ in verschiedene Gewänder kleiden, um wieder anschließend in die Ausgangform zurückzufinden:

Wir prüfen, ob die vier Brüche wirklich gleichwertig sind, indem wir ihre Anteile von 120 berechnen:

$^{3}/_{5}$ v 120 = 3 x 24 = 72
$^{24}/_{40}$ v 120 = 24 x 3 = 72
$^{72}/_{120}$ v 120 = 72 x 1 = 72
$^{12}/_{20}$ v 120 = 12 x 6 = 72



Alle vier Brüche führen also auf denselben Anteil 72.

Solcherart können wir verschiedene Brüche auf Rundreisen über mehrere Stationen schicken. Womit gekürzt und erweitert werden soll, lassen wir die Schüler vorschlagen.

Größenvergleiche zwischen Brüchen

Wir haben gesehen: Brüche können verschiedene Gewänder und doch den gleichen Zahlenwert haben. Ihre Gleichwertigkeit können wir leicht feststellen, indem wir sie auf unserer Rundreise durch Erweitern und Kürzen ineinander überführen.

Wie steht es aber mit Brüchen, die einander fremd sind und nicht durch Erweitern ineinander übergeführt werden können? Sie müssen dann ja verschieden groß sein. Wenn wir zum Beispiel die Brüche $^{2}/_{3}$ und $^{3}/_{5}$ betrachten, sehen wir zwar, dass sie einander fremd sind, aber wie können wir ihre Zahlenwerte miteinander vergleichen? Wir können die Frage entscheiden, indem wir die Anteile vergleichen, die sich die beiden Brüche von einer geeigneten (für beide passenden) ganzen Zahl nehmen:

$^{3}/_{5}$ v 15 = 9 $^{2}/_{3}$ v 15 = 10

$^{3}/_{5}$ v 30 = 18 $^{2}/_{3}$ v 30 = 20

$^{3}/_{5}$ v 45 = 27 $^{2}/_{3}$ v 45 = 30

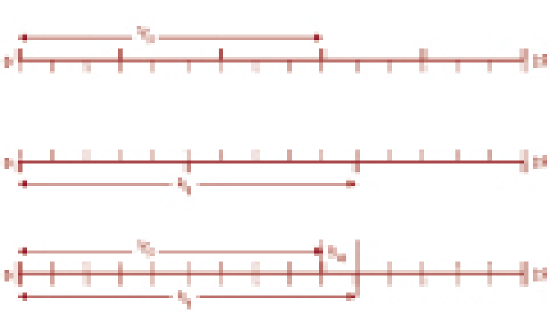
Aus den errechneten Bruchteilen müssen wir schließen, dass $^{3}/_{5}$ einen kleineren Zahlenwert hat als $^{2}/_{3}$.

Wir können aber den Unterschied auch den Brüchen selbst ansehen, wenn wir sie so erweitern, dass ihre neuen Gewänder wenigstens in den Nennern übereinstimmen, also gleichnamig geworden sind. Dieser gemeinsame Nenner muss ein gemeinsames Vielfaches von 5 und 3 sein, also 30, 45, 60 … usw., das heißt, genau solche Zahlen, an denen beide Brüche gleichzeitig Anteile nehmen konnten. Das kleinste gemeinsame Vielfache ist 15 und daher mit dem geringsten Erweiterungsaufwand erreichbar.

Erweitern wir $^{3}/_{5}$ mit 3 und $^{2}/_{3}$ mit 5. Die neuen Gewänder bekommen dann beide den Nenner 15: $^{3}/_{5} = {}^{9}/_{15}$ $^{2}/_{3} = {}^{10}/_{15}$

Durch die neuen Formen sind die beiden Brüche unmittelbar miteinander vergleichbar geworden: $^{9}/_{15}$ ist um $^{1}/_{15}$ kleiner als $^{10}/_{15}$; und deswegen ist auch $^{3}/_{5}$ um genau $^{1}/_{15}$ kleiner als $^{2}/_{3}$.

Dieser Größenvergleich kann auch durch Teilungen einer Strecke sichtbar gemacht werden. Durch solche Streckenbetrachtungen können die Schüler Größenvorstellungen mit den Brüchen verbinden. Teilen wir eine Strecke von 15 cm zuerst in 5, dann in 3 gleiche Teilstücke.



Nun vergleichen wir mehrere Brüche miteinander. Die Brüche $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{6}$, $^{5}/_{8}$ sind zunächst nach der Größe der Nenner geordnet. Doch ist dies auch die Reihenfolge ihrer Größenwerte? Wenn wir alle vier Brüche auf den Nenner 24 erweitern, können wir die Unterschiede von Bruch zu Bruch leicht feststellen und sie damit nach ihrer Größe ordnen:

$^{15}/_{24} < {}^{16}/_{24} < {}^{18}/_{24} < {}^{20}/_{24}$

$^5/_8 < ^2/_3 < ^3/_4 < ^5/_6$

Die Unterschiede betragen: $^1/_{24}$, $^2/_{24}$, $^2/_{24}$.

Subtraktion von Brüchen

Da wir bereits die Unterschiede zwischen zwei Brüchen bestimmen können, haben wir auch den Weg gefunden, wie ein Bruch von einem andern subtrahiert werden kann; denn Subtrahieren ist eigentlich ein Größenvergleich, und dazu haben wir sie zuerst auf einen gleichen Nenner erweitert.

$^2/_3 - ^5/_8 = ^{16}/_{24} - ^{15}/_{24} = ^1/_{24}$

$^3/_4 - ^2/_3 = ^9/_{12} - ^8/_{12} = ^1/_{12}$ $(= ^2/_{24})$

Es kann auch vorkommen, dass der eine Nenner ein Vielfaches des andern ist, dann muss nur der kleinere Nenner erweitert werden:

$^5/_{12} - ^1/_3 = ^5/_{12} - ^4/_{12} = ^1/_{12}$.

Oder beide Nenner haben ein kleineres gemeinsames Vielfaches als ihr Produkt:

$^5/_6 - ^4/_9 = ^{15}/_{18} - ^8/_{18} = ^7/_{18}$.

Immer wieder können wir uns auch an Bruchteile von ganzen Zahlen erinnern und damit die Rechnung verifizieren, hier wären $^5/_6$ und $^4/_9$ von einem (geeigneten) Ganzen, zum Beispiel von 36, zu bestimmen:

$^5/_6$ von 36 weniger $^4/_9$ von 36 sind: 30 – 16 = 14

Welcher Bruchteil von 36 ist 14? 14 = $^7/_{18}$ von 36

Solche Verifikationen, immer wieder durchgeführt, verbinden das früher Behandelte mit dem Neuen und lassen ein Gefühl der Sicherheit entstehen.

Addition

Bei Brüchen mit gleichen Nennern dürfen wir einfach die Zähler addieren. Schon in der ersten Epoche, im Umgang mit den Kreissektoren, erlebten die Schüler:

$^1/_6 + ^1/_6 = ^2/_6$ $(= ^1/_3)$ $\qquad$ $^5/_{12} + ^7/_{12} = ^{12}/_{12} = 1$

Und sind sich die Brüche fremd, so erweitern wir sie mit geeigneten Zahlen, damit beide zum selben Nenner gelangen, also gleichnamig werden:

$^1/_3 + ^1/_2 = ^2/_6 + ^3/_6 = ^5/_6$ $\qquad$ $^1/_3 + ^1/_4 = ^4/_{12} + ^3/_{12} = ^7/_{12}$

Bisher hatten wir Brüche bevorzugt, deren Zähler kleiner ist als der Nenner; wir nennen sie »echte Brüche«. Beim Addieren schießt die Summe leicht über die Einheit hinaus. Wir erkennen es daran, dass der Zähler größer wird als der Nenner; es sind »unechte Brüche«. Wir können bei ihnen die ganzen Bestandteile sichtbar machen; gemeinsam mit dem verbleibenden Bruchrest bilden sie »gemischte Zahlen«:

$^2/_3 + ^3/_4 = ^8/_{12} + ^9/_{12} = ^{17}/_{12} = \mathbf{1\,^5/_{12}}$

$^2/_3 + ^1/_4 + ^5/_6 + ^{11}/_{12} = ^8/_{12} + ^3/_{12} + ^{10}/_{12} + ^{11}/_{12} = ^{32}/_{12} = ^8/_3 = \mathbf{2\,^2/_3}$

Zur Unterscheidung von normalen Brüchen (mit waagrechten Bruchstrichen) schreiben wir den Bruchrest bei gemischten Zahlen mit einem schrägen Bruchstrich. Er soll daran erinnern, dass es sich um eine Zusammensetzung in Form einer Summe handelt: $2\,^2/_3 = 2 + ^2/_3$ und nicht mit der Schreibweise in der Algebra zu verwechseln ist, bei der ein fehlendes Rechenzeichen zwischen zwei Zahlen stets eine Multiplikation bedeutet.

Beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen kommt es also vor allem darauf an, einen gemeinsamen (möglichst den kleinsten) Nenner zu erkennen. Darin sollen die Schüler Übung bekommen. Man wird am Anfang als Nenner nur kleine Zahlen wählen, bei denen gemeinsame Vielfache leicht zu erkennen sind; dann kann man zu größeren, aber immer noch übersichtlichen übergehen. Die Schüler sollten dabei auch bemerken, dass das Resultat kürzbar ist. Für die Größenvorstellung ist die Darstellung als gemischte Zahl durchaus eine Hilfe:

$$^3/_4 + {}^7/_{10} + {}^9/_{20} = {}^{15}/_{20} + {}^{14}/_{20} + {}^9/_{20} = {}^{38}/_{20} = {}^{19}/_{10} = \mathbf{1\ {}^9/_{10}}$$

Ob alle Schüler bei der Aufgabe

$$^5/_6 + {}^8/_{21} = ?$$

den kleinsten gemeinsamen Nenner erkennen? Wir beachten, dass die beiden Nenner bereits eine Gemeinsamkeit besitzen, nämlich die 3, welche in beiden enthalten ist. Diesen gemeinsamen Faktor kann man sich beim Erweitern »sparen«. Der erste Bruch muss nur mit 7, der zweite nur mit 2 erweitert werden:

$$^5/_6 + {}^8/_{21} = {}^{35}/_{42} + {}^{16}/_{42} = {}^{51}/_{42} = {}^{17}/_{14} = \mathbf{1\ {}^3/_{14}}$$

An solchen einfachen Beispielen kann in der sechsten Klasse auch schon die Methode der Primzahlzerlegung gezeigt werden:

$$^5/_6 + {}^8/_{21} = {}^5/_{2x3} + {}^8/_{3x7} = {}^{5x7}/_{2x3x7} + {}^{8x2}/_{3x7x2} = {}^{35}/_{42} + {}^{16}/_{42}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) ist das Produkt der insgesamt vorkommenden Primfaktoren: 2 x 3 x 7 = 42. Die in den Nennern jeweils fehlenden Primfaktoren werden durch Erweitern ergänzt.

Beim späteren Wiederholen können wir das Addieren und Subtrahieren von Brüchen auch mit Anteilen von ganzen Zahlen wieder in Erinnerung rufen. So packen wir das Problem von einer andern Seite her an. Wir stellen zum Beispiel die Aufgabe:

$^2/_3$ v 30 + $^1/_5$ v 30 = ? 20 + 6 = 26

und fragen dann nach dem Bruchteil: 26 = ? v 30; 26 = $^{13}/_{15}$ v 30

Also gilt auch: $^2/_3 + {}^1/_5 = {}^{13}/_{15}$, und die Schüler erkennen den Hauptnenner »Fünfzehntel« wieder und erweitern:

$$^2/_3 + {}^1/_5 = {}^{10}/_{15} + {}^3/_{15} = {}^{13}/_{15}$$

Wir fördern das Verständnis für das Bruchrechnen sehr, wenn wir es von verschiedenen Seiten her beleuchten und erst dann die »Regel« formulieren:

Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie auf einen gemeinsamen Nenner erweitert und dann die Zähler addiert bzw. subtrahiert.

Multiplizieren von Brüchen

Bei den Bruchteilen von ganzen Zahlen haben wir immer wieder beachtet:

Der Nenner eines Bruches hat die Wirkung eines Teilers und der Zähler die eines Vervielfachers.

Damit ist das Multiplizieren und das Dividieren mit einem Bruch gut vorbereitet. Geläufige Bruchteile können wir auch schon allein aus der Anschauung malnehmen und teilen:

$^1/_2$ x 6 sagt ja nur: Nimm die Hälfte von 6 (und erhalte 3), also: $^1/_2 \times 6 = {}^1/_2$ von $6 = 3$;

ebenso bedeutet $^1/_2 \times {}^1/_4$: Nimm die Hälfte von einem Viertel (und erhalte ein Achtel),

also: $^1/_2 \times {}^1/_4 = {}^1/_2$ von $^1/_4 = {}^1/_8$

ebenso rechnen wir: $^1/_3 \times {}^1/_2 = {}^1/_3$ von $^1/_2 = {}^1/_6$

Ebenso können wir die bisher geübten Bruchteile von ganzen Zahlen nun systematisch auf solche von gebrochenen Zahlen übertragen:

»$^3/_4$ mal 8« stellt für uns die gleiche Aufgabe dar wie: »was ist $^3/_4$ von 8«? Also muss $^1/_4$ von 8 (bzw. 8 geteilt durch 4) = 2
noch mit 3 multipliziert werden, daher:

$^3/_4 \times 8 = {}^3/_4$ von $8 = 3 \times 2 = 6$

Wir versuchen die Entsprechung bei Bruchbeispielen, wobei der Zähler zunächst noch teilbar sein soll: Bei

$^3/_4 \times {}^8/_7$ nehmen wir erst $^1/_4 \times {}^8/_7$

$^1/_4$ von $^8/_7$ (bzw. $^8/_7$ geteilt durch 4) = $^8/_7 : 4 = {}^2/_7$

[wir teilen dazu die Anzahl, also den Zähler]

und dann wird noch das Dreifache genommen: $3 \times {}^2/_7 = {}^6/_7$.

Wie aber ist $^3/_4 \times {}^5/_7$ zu rechnen? Damit der Zähler von $^5/_7$ durch 4 teilbar wird, erweitern wir zuerst $^5/_7$ mit 4 auf $^{20}/_{28}$ und teilen dann:

$^{20}/_{28} : 4 = {}^5/_{28}$ (= $^1/_4 \times {}^5/_7$)

[das »Vierteilen« bewirkt das Vierfache im Nenner]

und nehmen anschließend das Dreifache: $3 \times {}^5/_{28} = {}^{15}/_{28}$

Damit kann das Multiplizieren von Bruch mit Bruch verständnisvoll eingesehen, als richtig empfunden und als formale Regel formuliert werden:

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner rechnet.

Gleichzeitig haben wir gesehen:

Ein Bruch wird durch eine (ganze) Zahl dividiert, indem man
den Zähler dividiert oder den Nenner multipliziert.

Dividieren durch Brüche

Einen ersten Einstieg bietet die »passive« Umkehrung der Multiplikation, das »Enthaltensein«. Wenn der Multiplikand eine Maßbezeichnung trägt, fällt die Unterscheidung leichter:

Multiplikation 2 x **3 m** = 6 m

Die aktive Umkehrung heißt: »6 Meter geteilt durch 2« 6 m : 2 = **3 m**

Bei der passiven Umkehrung fragen wir: »Wie oft sind **3 m** in 6 m enthalten.«

Dabei können wir auch das »Enthaltensein« als »Messen« betrachten und dafür das Rechenzeichen -:- benutzen. »6 m -:- 3 m« meint dann, wir sollen die Strecke 6 m mit einer 3 m langen Messlatte ausmessen; sie passt zweimal hinein. Wir können die Strecke 3 m zweimal wegnehmen, bis wir sie erschöpft haben; der waagrechte Strich im Zeichen » -:- « soll dabei auf diese wiederholte Subtraktion deuten. 6 m -:- **3 m** = 2-mal

Dies können wir auf einfache Brüche übertragen, bei denen wir noch durch die Anschauung getragen sind:

Multiplikation $2 \times \mathbf{{}^1/_4\,m} = {}^1/_2$ m

Als Umkehrung fragen wir: »Wie oft ist $\mathbf{{}^1/_4\,m}$ in ${}^1/_2$ m enthalten.«

${}^1/_2$ m -:- $\mathbf{{}^1/_4\,m}$ = 2-mal

Solche und ähnliche Aufgaben können wir durch die entsprechenden Kreisteile leicht verifizieren. Auf dem nun folgenden systematischen Weg zur allgemeinen Rechenregel können wir dann stets auf gesicherte Beispiele und die dabei gemachten anschaulichen Erfahrungen zurückgreifen.

Zunächst schauen wir anhand einer Rechenreihe auf die Wirkung des Nenners im dividierenden Bruch:

$60 : 12 = 5$ oder $60 : {}^{12}/_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \times 5$

Teilen wir statt durch 12 nur noch durch die Hälfte, also durch 6, so verdoppelt sich das Resultat:

$60 : 6 = 10$ oder $60 : {}^{12}/_{\mathbf{2}} = \mathbf{2} \times 5$

Teilen wir durch ein Drittel von 12 (durch 4), so verdreifacht sich das Resultat:

$60 : 4 = 15$ oder $60 : {}^{12}/_{\mathbf{3}} = \mathbf{3} \times 5$

Und so weiter: $60 : 3 = 20$ oder $60 : {}^{12}/_{\mathbf{4}} = \mathbf{4} \times 5$

$60 : 2 = 30$ oder $60 : {}^{12}/_{\mathbf{6}} = \mathbf{6} \times 5$

Wir sehen also:

Die Anzahl nehmen wir mit dem Nenner des dividierenden Bruches mal.

Nun teilen wir einen Bruch, zunächst durch eine ganze Zahl:

${}^3/_8 : 5 = {}^3/_{8\times5} = {}^3/_{40}$ ${}^3/_8 : {}^5/_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \times {}^3/_{40}$

Den Nenner multiplizieren wir mit dem Zähler des dividierenden Bruches.

Anschließend dividieren wir durch einen Bruchteil dieser Zahl

${}^3/_8 : 5 = {}^3/_{40}$ ${}^3/_8 : {}^5/_{\mathbf{7}} = \mathbf{7} \times {}^3/_{40} = {}^{3\times7}/_{40} = {}^{21}/_{40}$

Das Ergebnis der Division haben wir also mit »richtigem« Malnehmen erhalten

${}^3/_8 : {}^5/_7 =$ ${}^3/_8 \times {}^7/_5 = {}^{3\times7}/_{8\times5} = {}^{21}/_{40}$

und wir können die Regel formulieren:

Durch einen Bruch teilt man, indem man mit dem Zähler dividiert und mit dem Nenner multipliziert. Oder: *Durch einen Bruch teilt man, indem man mit dessen Kehrwert multipliziert.*

Dass solche Gedankengänge auch unabhängig von konkreten Beispielen verstanden werden können, werden Schüler aber wohl erst denken lernen, wenn im algebraischen Rechnen (7. und 8. Klasse) allgemeingültige Rechengesetze errungen werden.

Den ursprünglichen »naiven« Ansatz (Malnehmen und Enthaltensein von Brüchen) pflegen wir unabhängig von der gewonnenen Rechenregel immer wieder anhand anschaulicher Beispiele und üben damit den »alltäglichen« Umgang mit einfachen Brüchen. Passende Kreissektoren werden dabei für schwächere Schüler immer noch eine bildhafte Hilfe bieten:

${}^1/_2 \times {}^1/_4$ oder ${}^1/_2$ von ${}^1/_4$ oder ${}^1/_4 : 2$ ${}^1/_3 \times {}^1/_4 = {}^1/_3$ von ${}^1/_4 = {}^1/_{12}$

${}^2/_3 \times {}^1/_4 = 2 \times [{}^1/_3$ von ${}^1/_4] = 2 \times {}^1/_{12} = {}^1/_6$

Beim Dividieren fragen wir nach dem Enthaltensein:

$^1/_2 : {}^1/_6$ bzw. $^1/_2$ -:- $^1/_6$ »Wie oft ist $^1/_6$ in $^1/_2$ enthalten?« – »3-mal«
$^1/_3 : {}^1/_{12}$ bzw. $^1/_3$ -:- $^1/_{12}$ »Wie oft ist $^1/_{12}$ in $^1/_3$ enthalten?« – »4-mal«

Ausblick

Gerade das Enthaltensein von Brüchen gehört zu den treffendsten Beispielen dafür, dass die beiden möglichen Umkehrungen der Multiplikation völlig verschiedene Bedeutungen haben. Der grundsätzliche Zusammenhang von Rechenoperationen und ihren Umkehrungen ist damit beleuchtbar. Ernst Bindel hat eindringlich darauf hingewiesen, dass Addieren, Multiplizieren und Potenzieren jeweils zwei Umkehrungen haben, eine passive und eine aktive: Ergänzen und Subtrahieren, Messen (oder Enthaltensein) und Dividieren, Wurzelziehen und Logarithmieren. Louis Locher-Ernst lässt in seinem grundlegenden Werk »Arithmetik und Algebra« das ganze Gebiet des Rechnens in der Übersicht über die neun Rechenoperationen gipfeln. Der Zusammenhang ihres Aufbaues kann als makelloser, folgerichtiger Organismus erkannt werden. Wenn die Schüler in der zehnten Klasse das Logarithmieren als Krönung kennengelernt haben, kann ihnen die Schönheit dieses Aufbaues bewusst werden. Es lohnt sich, mit einem sachgemäßen Fundament in der Unter- und Mittelstufe darauf hinzuarbeiten.

Zu den Autoren: *Arnold Bernhard*, Jahrgang 1926. Studium der Mathematik an der ETH Zürich. Hat 25 Jahre an Ober- und Mittelstufe der Rudolf Steiner Schule in Basel unterrichtet. War viele Jahre hindurch in der Lehrerbildung, insbesondere am Seminar für Waldorfpädagogik in Stuttgart wie auch in anderen Lehr- und Forschungseinrichtungen tätig.

Adolf Fischer, Jahrgang 1946, nach Feinmechaniker-Lehre Studium der Mathematik und Physik in Tübingen; Oberstufenlehrer an der Waldorfschule Ulm; Mitbegründer der Waldorfschule am Illerblick in Ulm als Geschäftsführer und Klassenlehrer. Mitarbeit in der Lehrer-Fortbildung mit Vorträgen, Seminarkursen und Unterrichtsmaterial.

Bemerkungen:

Vorliegender Artikel geht auf ein umfangreiches Manuskript von Arnold Bernhard zurück, das unter anderem auch zahlreiche Rechenbeispiele enthielt. In Abstimmung mit ihm wurden die wesentlichen Gedankengänge im vorliegenden Text durch Adolf Fischer zusammenfassend wiedergegeben. Mit Rücksicht auf den Textumfang wurden nur noch die wichtigen Schritte mit – entsprechend wenigen – Beispielen illustriert.
Die hier benutzte Schreibweise der Brüche mit Schrägstrich ist eine unbeabsichtigte Folge des Schriftbildes der üblichen Textprogramme. Sie sollte im Unterricht ausdrücklich vermieden, also immer durch waagrechte Bruchstriche ersetzt werden.

Literatur:

Ernst Bindel: Logarithmen für Jedermann, Stuttgart 1983
Louis Locher-Ernst: Arithmetik und Algebra, Dornach 1984
Adolf Fischer: »Im Leben mit etwas rechnen können«, Teil 2; »Erziehungskunst«, April 2002 (S. 401-407)